INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE

SESSION 1988 — **Epreuve de MATHEMATIQUES**

α et β sont deux constantes réelles strictement positives.

I. A est l'ensemble des couples (x,y) de réels tels que $x \neq 1$.
F est une application de A dans $\mathbb{R}$, admettant sur A des dérivées partielles notées $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, continues, et telles que :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (x-1)(\alpha x-\beta)\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \qquad (1)$$

I.1° On étudie le cas où $\alpha \neq \beta$.

a) On pose $u=\frac{\alpha x-\beta}{x-1}$ et $v=e^{(\beta-\alpha)y}$ et on désigne par G la fonction de deux variables réelles, telle que, pour tout $(x,y)\in A$: $G\left(\frac{\alpha x-\beta}{x-1}, e^{(\beta-\alpha)y}\right)=F(x,y)$.

Etablir une relation simple liant les dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ de $G(u,v)$ pour que F vérifie (1).

b) On pose $w=uv=\frac{\alpha x-\beta}{x-1}e^{(\beta-\alpha)y}$.

Soit H la fonction des deux variables réelles w et v, telle que:
$H(w,v)=H(uv,v)=G(u,v)$.
Etablir la relation que doivent vérifier les dérivées partielles de H par rapport à w et v, quand g vérifie la relation trouvée à la question précédente.
Montrer que, lorsque F vérifie (1), H est une fonction dérivable d'une seule variable réelle et que $F(x,y)=H\left(\frac{\alpha x-\beta}{x-1}e^{(\beta-\alpha)y}\right)$.

c) Montrer que l'ensemble des solutions de (1) quand $\alpha \neq \beta$, peut être obtenu à partir de fonctions H arbitraires d'une seule variable. Quelles sont alors les solutions de (1)?

I.2° On étudie maintenant le cas où $\alpha=\beta$:on cherche les solutions de l'équation: $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\alpha(x-1)^2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ (1)

Montrer que, si F vérifie (1), il existe une fonction h d'une seule variable réelle, dérivable sur R, telle que:

$$F(x,y)=h\left(\frac{1}{\alpha(x-1)}-y\right).$$

En déduire l'ensemble des solutions de (1) dans le cas où $\alpha=\beta$.

II. t est une variable réelle, positive ou nulle.
Δt est un réel strictement positif.
L'effectif d'une population étant de m individus à l'instant t, et k désignant un entier naturel:
$a(m,k,t,\Delta t)$ est la probabilité d'apparition de k individus nouveaux dans la population entre les instants t et $t+\Delta t$.
$b(m,k,t,\Delta t)$ est la probabilité de disparition de k individus de la population entre les instants t et $t+\Delta t$.

On pose $a'(m,t,\Delta t)=\sum_{k=2}^{\infty} a(m,k,t,\Delta t)$ et $b'(m,t,\Delta t)=\sum_{k=2}^{\infty} b(m,k,t,\Delta t)$.

On suppose successivement que:
a) Les apparitions d'individus nouveaux et les disparitions d'individus appartenant à la population sont des événements indépendants en probabilité.
b) Pour m et t fixés, $\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{a(m,1,t,\Delta t)}{\Delta t}=\alpha m$; $\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{b(m,1,t,\Delta t)}{\Delta t}=\beta m$;
$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{a'(m,t,\Delta t)}{\Delta t}=0$; $\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{b'(m,t,\Delta t)}{\Delta t}=0$.

II.1° On désigne par $d(m,n,t,\Delta t)$ la probabilité pour que l'effectif soit égal à n à l'instant $t+\Delta t$, sachant qu'il est égal à m à l'instant t (probabilité de transition) et on suppose que:

Pour n et t fixés, $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=2}^{\infty} d(n+k,n,t,\Delta t)=0$.

a) Exprimer $d(m,m,t,\Delta t)$ et trouver la limite de $\frac{d(m,m,t,\Delta t)-1}{\Delta t}$ quand, m et t étant fixés, Δt tend vers 0 (par valeurs positives).
b) Donner des encadrements de $d(n-1,n,t,\Delta t)$ et de $d(n+1,n,t,\Delta t)$.

Montrer que $\frac{1}{\Delta t}d(n-1,n,t,\Delta t)$ et $\frac{1}{\Delta t}d(n+1,n,t,\Delta t)$ ont respectivement

TSVP

pour limites $\alpha(n-1)$ et $\beta(n+1)$ lorsque Δt tend vers 0 par valeurs positives.(n et t fixés)

c) Majorer $d(n-k,n,t,\Delta t)$ quand $2 \leqslant k \leqslant n$.

En déduire que $\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=2}^{n} d(n-k,n,t,\Delta t)$ tend vers 0, quand Δt tend vers 0 par valeurs positives.(n et t fixés)

II.2° Soit $P_n(t)$ la probabilité pour que l'effectif soit égal à n à l'instant t.
On suppose que, pour n entier naturel, la fonction P_n est dérivable sur $]0,+\infty[$, et dérivable à droite en 0.
Exprimer $P_n(t+\Delta t)$ en fonction des $P_{n+k}(t)$($k\in Z$ et $k \geqslant -n$), et des probabilités de transition pour $n \geqslant 1$.
Donner un encadrement de $P_n(t+\Delta t)$, à l'aide de $P_{n-1}(t)$, $P_{n+1}(t)$, $P_n(t)$ et des encadrements obtenus précédemment.

II.3° Montrer que, pour $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$, $P_n' = -(\alpha+\beta)nP_n + (n-1)\alpha P_{n-1} + (n+1)\beta P_{n+1}$.

II.4° x est une variable réelle de valeur absolue strictement inférieure à 1 et $t \geqslant 0$.

a) Montrer que la série de terme général $P_n(t)x^n$ converge.
On désigne par f(x,t) sa somme.

b) Montrer que la série de terme général $P_n'(t)x^n$ converge.

On admet que sa somme est égale à $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.

c) Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

II.5° Prouver que, pour $|x|<1$ et $t \geqslant 0$, on a:
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = (x-1)(\alpha x-\beta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,t).$$

En déduire qu'il existe deux fonctions g et h d'une variable réelle, dérivables, et telles que:

si $\alpha \neq \beta$ $f(x,t) = g\left(\frac{\alpha x-\beta}{x-1}\, e^{(\beta-\alpha)t}\right)$. si $\alpha=\beta$ $f(x,t) = h\left(\frac{1}{\alpha(x-1)} - t\right)$.

III. L'effectif de la population à l'instant t=0 est un entier strictement positif K.

III.1°a) Déterminer les fonctions g et h correspondant respectivement aux cas où $\alpha \neq \beta$ et $\alpha=\beta$: préciser les expressions de g(z) et h(z) en fonction de z.

b) Exprimer f(x,t) dans les deux cas.

III.2° On se place dans le cas où $\alpha=\beta$.

a) Déterminer $P_0(t)$ pour $t \geqslant 0$. Etudier sa limite quand t tend vers l'infini.

b) Montrer que le calcul des dérivées partielles successives de f(x,t) par rapport à x, permet d'exprimer $P_n(t)$ pour $n \geqslant 1$. Calculer effectivement $P_1(t)$.

III.3° On suppose ici K=2 et $\alpha=\beta$.

a) Déterminer 3 expressions q(t), r(t), s(t) telles que $f(x,t) = \left(q(t) + \frac{r(t)}{1-s(t)x}\right)^2$ pour des valeurs de (x,t) qu'on précisera.

b) En déduire que, pour t fixé, f(x,t) admet un développement en série entière relativement à x, dont les coefficients sont des expressions de t qu'on explicitera.

c) Exprimer $P_n(t)$ pour $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$. Etudier la limite de $P_n(t)$ quand, n étant fixé, t tend vers l'infini.

d) Calculer l'espérance mathématique de l'effectif de la population à l'instant t. Comparer ce résultat avec celui du III.2°a).

III.4° On prend ici K=1 et $\alpha=\beta$.
Calculer $P_n(t)$ pour $n \geqslant 1$ et l'espérance mathématique de l'effectif à l'instant t.

III.5° On se place maintenant dans le cas où $\alpha \neq \beta$.

a) Déterminer $P_0(t)$. Etudier suivant les valeurs de (α,β) sa limite quand t tend vers l'infini.

b) Calculer $P_1(t)$ et sa limite quand t tend vers l'infini.

c) On suppose maintenant $\alpha \neq \beta$ et K=1.
Calculer $P_n(t)$ pour $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$ et l'espérance mathématique de l'effectif à l'instant t.
Déterminer leurs limites respectives quand, n, α et t étant fixés, β tend vers α.
Comparer ces limites aux résultats du III.4°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail